第五章
向量分析

習題 5-1

2. 設 $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-5\mathbf{j}+\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=-3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$，$\mathbf{c}=5\mathbf{i}+3\mathbf{j}$，求

(2) $\|2\mathbf{a}+3\mathbf{b}-\mathbf{c}\|$

解：(2) $\|2\mathbf{a}+3\mathbf{b}-\mathbf{c}\|=\|-10\mathbf{i}-4\mathbf{j}+8\mathbf{k}\|=\sqrt{100+16+64}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$

5. 設 $\triangle ABC$ 的頂點座標爲 $A(1，3，1)$、$B(0，-1，3)$ 及 $C(3，1，0)$，求此三角形重心的座標.

解：令 D 爲 $\overline{BC}$ 的中點，E 爲 $\overline{AC}$ 的中點，F 爲 $\overline{AB}$ 的中點，

G 爲 $\triangle ABC$ 的重心，

則 $\overrightarrow{GA}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DA}$，　$\overrightarrow{GB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{EB}$，　$\overrightarrow{GC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{FC}$

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC})$$

$$=\overrightarrow{OG}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$$

$$=\overrightarrow{OG}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{FC}\right)$$

$$=\overrightarrow{OG}+\frac{2}{9}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC})$$

$$=\overrightarrow{OG}+\frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$$

$$=\overrightarrow{OG}+\frac{2}{9}\left[\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})\right]$$

$$=\overrightarrow{OG}+\mathbf{0}$$
$$=\overrightarrow{OG}$$

故 G 的座標為 $\left(\dfrac{1+0+3}{3},\ \dfrac{3+(-1)+1}{3},\ \dfrac{1+3+0}{3}\right)=\left(\dfrac{4}{3},\ 1,\ \dfrac{4}{3}\right)$.

6. 求一單位向量 $\mathbf{u}$ 平行於 $\mathbf{a}=\langle 2,4,-5\rangle$ 與 $\mathbf{b}=\langle 1,2,3\rangle$ 的和向量.

解：$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\langle 2,4,-5\rangle+\langle 1,2,3\rangle=\langle 3,6,-2\rangle$

$$\mathbf{u}=\frac{3\mathbf{i}+6\mathbf{j}-2\mathbf{k}}{|3\mathbf{i}+6\mathbf{j}-2\mathbf{k}|}=\frac{3}{7}\mathbf{i}+\frac{6}{7}\mathbf{j}-\frac{2}{7}\mathbf{k}$$

8. 判斷下列向量組為線性獨立或線性相依.

(1) $\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$

解：(1) $\det\begin{bmatrix}1&3&1\\-1&1&-2\\2&2&1\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&1\\-1&1&-2\\2&2&1\end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}&=1+3(-2)(2)+(1)(2)(-1)-(1)(1)(2)-3(-1)(1)\\&\quad-1(2)(-2)\\&=1-12-2-2+3+4\\&=-8\neq 0\end{aligned}$$

因此，向量 $\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$ 與 $\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ 為一組線性獨立向量.

10. 試求通過點 $P_0(-3,2,1)$ 且平行於 $\mathbf{u}=[2,-3,4]^T$ 之直線的參數方程組.

解：通過點 $P_0(-3,2,1)$ 且平行於 $\mathbf{u}=[2,-3,4]^T$ 之對稱方程式為

$$\frac{x+3}{2}=-\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{4}$$

令
$$\frac{x+3}{2}=-\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{4}=t$$

故求得直線之參數方程組爲

$$\begin{cases} x=-3+2t \\ y=2-3t,\ t\in\mathbb{R} \\ z=1+4t \end{cases}$$

習題 5-2

2. 求長度爲 10 的兩個向量，使其同時垂直於向量 $\mathbf{a}=\langle 4,3,6\rangle$ 與 $\mathbf{b}=\langle -2,-3,-2\rangle$.

解：設此向量爲 $\mathbf{v}=\langle a,b,c\rangle$，則

$$\langle a,b,c\rangle\cdot\langle 4,3,6\rangle=0 \quad 且 \quad \langle a,b,c\rangle\cdot\langle -2,-3,-2\rangle=0$$

故
$$\begin{cases} 4a+3b+6c=0 \\ -2a-3b-2c=0 \end{cases}$$

解得 $a=-6k$，$b=2k$，$c=3k$，$k\in\mathbb{R}$，故此向量爲

$$\frac{10(-6k,2k,3k)}{\sqrt{(-6k)^2+(2k)^2+(3k)^2}}=\frac{10(-6,2,3)}{\pm 7}$$

所以此兩向量分別爲

$$\frac{10}{7}(-6,2,3)\ 與\ -\frac{10}{7}(-6,2,3)$$

4. 求 $\mathbf{u}=2\mathbf{i}-5\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 在 $\mathbf{v}=-3\mathbf{i}+\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ 上之投影向量的長度.

解：$\|\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}\|=\left|\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right|=\left|\dfrac{-4}{\sqrt{59}}\right|=\dfrac{4}{\sqrt{59}}\approx 0.5208$

7. 試求空間上一點 $P(3,-1,2)$ 至平面 $2x-y+z=4$ 的距離.

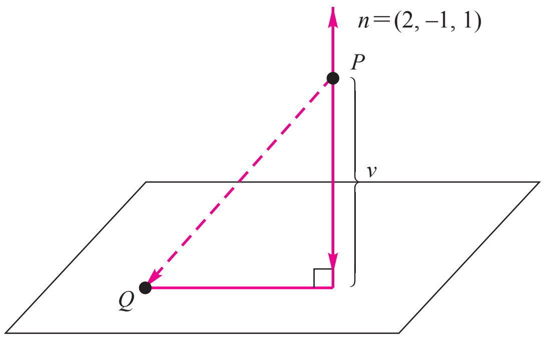
解：令 Q 爲平面上任一點，則 $\|\text{proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{PQ}\|$ 爲所求之距離，如圖所示.

向量以 P 爲起點指向平面，如圖所示，所求之距離爲 $\mathbf{v}$ 之長度.

$$\|\mathbf{v}\|=\|\text{proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{PQ}\|=\frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

$$=\frac{|(-3,\ 1,\ 2)\cdot(2,\ -1,\ 1)|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}}=\frac{|(-3)\times2+1\times(-1)+2\times1|}{\sqrt{6}}$$

$$=\frac{5}{\sqrt{6}}$$



習題 5-3

3. 求以 $\mathbf{a}=-2\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ 與 $\mathbf{b}=4\mathbf{i}-2\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ 爲二鄰邊所決定之平行四邊形的面積.

解：

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-2&1&4\\4&-2&-5\end{vmatrix}=3\mathbf{i}+6\mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$$

故面積爲 $3\sqrt{5}$.

5. 求頂點爲 $A(0,\ 0,\ 0)$、$B(-1,\ 2,\ 4)$ 與 $C(2,\ -1,\ 4)$ 之三角形的面積.

解： $\overrightarrow{AB}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$，$\overrightarrow{AC}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k}$，

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -1 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=12\mathbf{i}+12\mathbf{j}-3\mathbf{k}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{144+144+9}=3\sqrt{33}$$

故面積為 $\dfrac{3\sqrt{33}}{2}$.

9. 求以 $(-1，2，3)$、$(4，-1，2)$、$(5，6，3)$ 與 $(1，1，-2)$ 爲頂點之四面體的體積.

解：以 $(-1，2，3)$ 爲始點，其他三點爲終點，可得三邊的向量如下：

$\mathbf{a}=5\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}$，$\mathbf{c}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}-5\mathbf{k}$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}5 & -3 & -1\\ 6 & 4 & 0\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}=-176$$

故體積為 $$\frac{1}{6}\,|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|=\frac{88}{3}$$

10. 已知三向量 $\mathbf{u}=\langle 1，a，2\rangle$、$\mathbf{v}=\langle b，1，3\rangle$、$\mathbf{w}=\langle b，1，1\rangle$ 及 $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$，而且 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$、$\mathbf{w}$ 共平面，試求 a、b 之值.

解：已知 $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$，得

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\langle 1，a，2\rangle\cdot\langle b，1，3\rangle=b+a+6=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

又因，$\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$、$\mathbf{w}$ 共平面，亦即

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\begin{vmatrix}1 & a & 2\\ b & 1 & 3\\ b & 1 & 1\end{vmatrix}=2ab-2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

解聯立方程式 $$\begin{cases}a+b=-6\\ ab-1=0\end{cases}$$

得 $$a=-3\pm\sqrt{8},\qquad b=\frac{1}{-3\pm\sqrt{8}}$$

習題 5-4

3. 令 $\mathbf{F}(t)=\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

(1) 求 $\mathbf{F}'(t)$.

(2) 試證：$\mathbf{F}'(t)$ 恆平行於 xy-平面.

(3) 哪些 t 值使 $\mathbf{F}'(t)$ 平行於 xz-平面？

(4) $\mathbf{F}(t)$ 的大小是否一定？

(5) $\mathbf{F}'(t)$ 的大小是否一定？

(6) 計算 $\mathbf{F}''(t)$.

解：(1) $\mathbf{F}'(t)=\cos t\mathbf{i}-\sin t\mathbf{j}$

(2) 因 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{F}'(t)=0$，故 $\mathbf{F}'(t)$ 恆平行於 xy-平面.

(3) $\mathbf{j}\cdot\mathbf{F}'(t)=-\sin t=0 \Rightarrow t=n\pi$ $(n=0，\pm1，\pm2，\cdots)$

(4) 是. $|\mathbf{F}(t)|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}=\sqrt{2}$

(5) 是. $|\mathbf{F}'(t)|=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=1$

(6) $\mathbf{F}''(t)=-\sin t\mathbf{i}-\cos t\mathbf{j}$

4. 求下列各題的 $\mathbf{F}'(t)$.

(2) $\mathbf{F}(t)=\sin t\mathbf{i}+e^{-t}\mathbf{j}+t\mathbf{k}$

(3) $\mathbf{F}(t)=(t^3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(e^t\mathbf{i}+\mathbf{j}+t^2\mathbf{k})$

解：(2) $\mathbf{F}'(t)=\cos t\mathbf{i}-e^{-t}\mathbf{j}+\mathbf{k}$

(3) $\mathbf{F}'(t)=3t^2\mathbf{i}\times(e^t\mathbf{i}+\mathbf{j}+t^2\mathbf{k})+(t^3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(e^t\mathbf{i}+2t\mathbf{k})$

$=-3t^4\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}+2t\mathbf{i}-(2t^4+e^t)\mathbf{j}-e^t\mathbf{k}$

$=2t\mathbf{i}-(5t^4+e^t)\mathbf{j}+(3t^2-e^t)\mathbf{k}$

5. 求下列各題的 $f'(t)$.

(1) $f(t)=(3t\mathbf{i}+5t^2\mathbf{j})\cdot(t\mathbf{i}-\sin t\mathbf{j})$

解：(1) $f(t)=3t^2-5t^2\sin t \Rightarrow f'(t)=6t-10t\sin t-5t^2\cos t$

10. 已知 $\mathbf{F}'(t)=2\mathbf{i}+\dfrac{t}{t^2+1}\mathbf{j}+t\mathbf{k}$，且 $\mathbf{F}(1)=\mathbf{0}$，求 $\mathbf{F}(t)$.

解：$\mathbf{F}'(t)=2\mathbf{i}+\dfrac{t}{t^2+1}\mathbf{j}+t\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}(t)=2t\mathbf{i}+\dfrac{1}{2}\ln(t^2+1)\mathbf{j}+\dfrac{1}{2}t^2\mathbf{k}+\mathbf{C}$

$\Rightarrow \mathbf{F}(1)=2\mathbf{i}+\dfrac{1}{2}\ln 2\mathbf{j}+\dfrac{1}{2}\mathbf{k}+\mathbf{C}=\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{C}=-2\mathbf{i}-\dfrac{1}{2}\ln 2\mathbf{j}-\dfrac{1}{2}\mathbf{k}$

故　$$\mathbf{F}(t)=2(t-2)\mathbf{i}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2+1}{2}\right)\mathbf{j}+\frac{1}{2}(t^2-1)\mathbf{k}$$

習題 5-5

1. 求圓螺旋線 $\mathbf{R}(t)=a\cos t\mathbf{i}+a\sin t\mathbf{j}+ct\mathbf{k}$ 上兩點 $(a，0，0)$ 與 $(a，0，2c\pi)$ 之間的長度.

解：$\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}=-a\sin t\mathbf{i}+a\cos t\mathbf{j}+c\mathbf{k}$

$$\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+c^2}=\sqrt{a^2+c^2}$$

故長度爲 $L=\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+c^2}\,dt=2\pi\sqrt{a^2+c^2}$.

3. 求圓螺旋線 $\mathbf{R}(t)=a\cos t\mathbf{i}+a\sin t\mathbf{j}+ct\mathbf{k}$ 的單位切向量、單位主法向量、單位副法向量、曲率及扭率.

解：$\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}=-a\sin t\mathbf{i}+a\cos t\mathbf{j}+c\mathbf{k}$，$\dfrac{ds}{dt}=\left|\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}\right|=\sqrt{a^2+c^2}$，因此，

$$\mathbf{T}=\frac{d\mathbf{R}}{ds}=\frac{d\mathbf{R}}{dt}\Big/\frac{ds}{dt}=\frac{-a\sin t\mathbf{i}+a\cos t\mathbf{j}+c\mathbf{k}}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt}=\frac{-a\cos t\mathbf{i}-a\sin t\mathbf{j}}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\frac{d\mathbf{T}}{dt}\Big/\frac{ds}{dt}=\frac{d\mathbf{T}}{dt}\Big/\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|=\frac{-a\cos t\mathbf{i}-a\sin t\mathbf{j}}{a^2+c^2}$$

曲率 $\kappa=\left|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right|=\dfrac{a}{a^2+c^2}$

單位主法向量 $\mathbf{N}=\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}=-\cos t\mathbf{i}-\sin t\mathbf{j}$

單位副法向量

$$\mathbf{B}=\mathbf{T}\times\mathbf{N}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+c^2}} & \dfrac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}} & c \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}=\frac{c\sin t\mathbf{i}-c\cos t\mathbf{j}+a\mathbf{k}}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds}=\frac{d\mathbf{B}}{dt}\bigg/\frac{ds}{dt}=\frac{d\mathbf{B}}{dt}\bigg/\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|=\frac{c\cos t\mathbf{i}+c\sin t\mathbf{j}}{a^2+c^2}$$

$$-\tau\mathbf{N}=-\tau(-\cos t\mathbf{i}-\sin t\mathbf{j})=\frac{c\cos t}{a^2+c^2}\mathbf{i}+\frac{c\sin t}{a^2+c^2}\mathbf{j}$$

可得扭率 $\tau=\dfrac{c}{a^2+c^2}$

5. 試證曲線 $x=x(s)$，$y=y(s)$，$z=z(s)$ 的曲率半徑爲

$$\rho=\frac{1}{\left[\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]^{1/2}}$$

解：位置向量 $\mathbf{R}(s)=x(s)\mathbf{i}+y(s)\mathbf{j}+z(s)\mathbf{k}$

$$\Rightarrow \mathbf{T}=\frac{d\mathbf{R}}{ds}=\frac{dx}{ds}\mathbf{i}+\frac{dy}{ds}\mathbf{j}+\frac{dz}{ds}\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{T}}{ds}=\frac{d^2x}{ds^2}\mathbf{i}+\frac{d^2y}{ds^2}\mathbf{j}+\frac{d^2z}{ds^2}\mathbf{k}$$

$$\kappa=\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|=\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]^{1/2}$$

故

$$\rho=\frac{1}{\kappa}=\frac{1}{\left[\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]^{1/2}}$$

習題 5-6

1. 求下列各函數的梯度 ∇f.

(3) $f(x, y, z)=e^{-x}\cos yz$

解：(3) $\nabla f(x, y, z)=-e^{-x}\cos yz\mathbf{i}-ze^{-x}\sin yz\mathbf{j}-ye^{-x}\sin yz\mathbf{k}$

4. 求 $f(x, y, z)=x^2yz+4xz^2$ 在點 $(1, -2, -1)$ 沿著 $2\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ 方向的方向導數.

解：$\nabla f(x, y, z)=(2xyz+4z^2)\mathbf{i}+x^2z\mathbf{j}+(x^2y+8xz)\mathbf{k}$

$\nabla f(1, -2, -1)=8\mathbf{i}-\mathbf{j}-10\mathbf{k}$

沿著 $2\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ 方向的單位向量爲

$$\mathbf{u}=\frac{2}{3}\mathbf{i}-\frac{1}{3}\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}$$

故方向導數爲

$$\frac{df}{ds}=(8\mathbf{i}-\mathbf{j}-10\mathbf{k})\cdot\left(\frac{2}{3}\mathbf{i}-\frac{1}{3}\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}\right)=\frac{37}{3}$$

7. 求曲面 $2xz^2-3xy-4x=7$ 在點 $(1, -1, 2)$ 的切平面.

解：$f(x, y, z)=2xz^2-3xy-4x=7$

$\Rightarrow \nabla f(x, y, z)=(2z^2-3y-4)\mathbf{i}-3x\mathbf{j}+4xz\mathbf{k}$

$\Rightarrow \nabla f(1, -1, 2)=7\mathbf{i}-3\mathbf{j}+8\mathbf{k}$

故切平面方程式爲 $7(x-1)-3(y+1)+8(z-2)=0$

即 $7x-3y+8z=26$

8. 求兩曲面 $x^2+y^2+z^2=9$ 與 $z=x^2+y^2-3$ 在點 $(2, -1, 2)$ 的交角 (即切平面間的角).

解：$f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2=9 \Rightarrow \nabla f(x, y, z)=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$

$\Rightarrow \nabla f(2, -1, 2)=4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$

$g(x, y, z)=x^2+y^2-z=3 \Rightarrow \nabla g(x, y, z)=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}-\mathbf{k}$

$\Rightarrow \nabla f(2, -1, 2)=4\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$

故 $$\theta=\cos^{-1}\frac{(4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k})\cdot(4\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k})}{|4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}||4\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}|}=\cos^{-1}\left(\frac{16}{6\sqrt{21}}\right)$$

$$=\cos^{-1}\left(\frac{8}{3\sqrt{21}}\right)\approx 54.5^{\circ}$$

習題 5-7

1. 計算 $\int_C y\,ds$，其中 C 的參數方程式為 $x=t^2$，$y=t$，$0\leqslant t\leqslant 2$.

解：$$\int_C y\,ds=\int_0^2 t\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^2 t\sqrt{(2t)^2+(1)^2}\,dt$$

$$=\int_0^2 t\sqrt{4t^2+1}\,dt=\frac{1}{12}(4t^2+1)^{3/2}\Big|_0^2$$

$$=\frac{1}{12}(17\sqrt{17}-1)$$

3. 計算 $\int_C xy^3\,ds$，其中 C 的參數方程式為 $x=4\sin t$，$y=4\cos t$，$z=3t$，$0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}$.

解：$$\int_C xy^3\,ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin t)(4\cos t)^3\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin t)(4\cos t)^3\sqrt{4(\cos t)^2+(-4\sin t)^2+(3)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 256\cos^3 t\sin t\cdot 5\,dt$$

$$=1280\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\sin t\,dt$$

$$=-320\left(\cos^4 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$=320$

6. 計算 $\int_C (x+2y)\,dx+(x-y)\,dy$，其中曲線 C 為 $x=2\cos t$，$y=4\sin t$，$0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{4}$.

解：
$$\int_C (x+2y)\,dx+(x-y)\,dy=\int_0^{\pi/4}(8\cos^2 t-16\sin^2 t-20\sin t\cos t)\,dt$$
$$=\int_0^{\pi/4}(8-24\sin^2 t-20\sin t\cos t)\,dt$$
$$=2\pi-24\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt-20\int_0^{\pi/4}\sin t\,d(\sin t)$$
$$=2\pi-12\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\,\Big|_0^{\pi/4}\right)-20\left(\frac{1}{2}\sin^2 t\,\Big|_0^{\pi/4}\right)$$
$$=2\pi-12\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)-5$$
$$=1-\pi$$

8. 設 $\mathbf{F}(x,\ y)=x^2\mathbf{i}+xy\mathbf{j}$，且 C 為半圓 $\mathbf{R}(t)=2\cos t\,\mathbf{i}+2\sin t\,\mathbf{j}$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$，試計算 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$.

解：因 $x=2\cos t$，$y=2\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$，則
$$\mathbf{F}(\mathbf{R}(t))=\mathbf{F}=4\cos^2 t\,\mathbf{i}+4\cos t\sin t\,\mathbf{j}$$
故
$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_0^{\pi}\mathbf{F}(\mathbf{R}(t))\cdot\mathbf{R}'(t)\,dt$$
$$=\int_0^{\pi}(4\cos^2 t\,\mathbf{i}+4\cos t\sin t\,\mathbf{j})\cdot(-2\sin t\,\mathbf{i}+2\cos t\,\mathbf{j})\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}(-8\cos^2 t\sin t+8\cos^2 t\sin t)\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}0\,dt=0$$

10. 在 (1) ～ (5) 題中，證明線積分與路徑無關.

(1) $\displaystyle\int_{(1,\,4)}^{(3,\,1)} 2xy^3\,dx+(2+3x^2y^2)\,dy$

證：$\dfrac{\partial}{\partial y}(2xy^3)=6xy^2=\dfrac{\partial}{\partial x}(2+3x^2y^2)$，故線積分與路徑無關.

(2) $\displaystyle\int_{(-1,\,2)}^{(2,\,3)} y^2\,dx+2xy\,dy$

證：$\dfrac{\partial}{\partial y}(y^2)=2y=\dfrac{\partial}{\partial x}(2xy)$，故線積分與路徑無關.

(3) $\displaystyle\int_{(1,\,2)}^{(4,\,0)} 3y\,dx+(3x+y)\,dy$

證：$\dfrac{\partial}{\partial y}(3y)=3=\dfrac{\partial}{\partial x}(3x+y)$，故線積分與路徑無關.

(4) $\displaystyle\int_{(0,\,0)}^{(3,\,2)} 2xe^y\,dx+x^2e^y\,dy$

證：$\dfrac{\partial}{\partial y}(2xe^y)=2xe^y=\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2e^y)$，故線積分與路徑無關.

(5) $\displaystyle\int_{(-1,\,2)}^{(0,\,1)} (3x-y+2)\,dx-(x+4y+3)\,dy$

證：$\dfrac{\partial}{\partial y}(3x-y+2)=-1=\dfrac{\partial}{\partial x}(-x-4y-3)$，故線積分與路徑無關.

12. 令 $\mathbf{F}(x,\,y)=(e^y+ye^x)\,\mathbf{i}+(xe^y+e^x)\,\mathbf{j}$. 若質點

(1) 由 $(2,\,0)$ 沿著 x-軸移到 $(-2,\,0)$；

(2) 由 $(2, 0)$ 沿著圓 $x^2+y^2=4$ 的上半部移到 $(-2, 0)$；

(3) 由 $(2, 0)$ 沿著橢圓 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的上半部移到 $(-2, 0)$；

(4) 繞圓 $x^2+y^2=4$ 一圈，

求力 $\mathbf{F}$ 作用於質點所作的功.

解：$\dfrac{\partial}{\partial y}(e^y+ye^x)=e^y+e^x=\dfrac{\partial}{\partial x}(xe^y+e^x)$，故 $\mathbf{F}$ 為保守，

而 $\phi(x, y)=xe^y+ye^x$.

(1) 功$=\phi(-2, 0)-\phi(2, 0)=-4$

(2) 功$=\phi(-2, 0)-\phi(2, 0)=-4$

(3) 功$=\phi(-2, 0)-\phi(2, 0)=-4$

(4) 0

習題 5-8

在 1～7 題中，利用格林定理計算線積分，其中假設曲線 C 是依逆時鐘方向.

1. $\displaystyle\int_C y^2\,dx+(x^2+y)\,dy$；$C$ 為具有頂點 $(0, 0)$、$(1, 0)$、$(1, 1)$ 與 $(0, 1)$ 的正方形.

解：令 $P(x, y)=y^2$，$Q(x, y)=x^2+y$，則 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2y$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x$.

$$\int_C y^2\,dx+(x^2+y)\,dy=\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint_R(2x-2y)\,dA$$

$$=\int_0^1\int_0^1(2x-2y)\,dy\,dx=\int_0^1(2xy-y^2)\Big|_0^1\,dx$$

$$=\int_0^1(2x-1)\,dx=x^2-x\Big|_0^1=0$$

3. $\displaystyle\int_C (x^2-y^2)\,dx+(x+y)\,dy$；$C$ 為圓 $x^2+y^2=9$.

解：$P(x, y)=x^2-y^2$，$Q(x, y)=x+y$，則 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2y$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$.

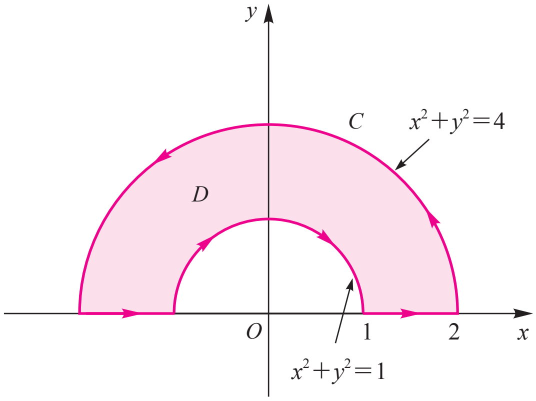
$$\int_C (x^2-y^2)\,dx+(x+y)\,dy=\iint_R ((1-(-2y))\,dA=\iint_R (1+2y)\,dA$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^3 (1+2r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}r^2+\sin\theta\,\frac{2}{3}r^3\right)\Bigg|_0^3 d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{2}+18\sin\theta\right)d\theta=\frac{9}{2}\theta-18\cos\theta\Bigg|_0^{2\pi}$$
$$=9\pi$$

6. $\int_C (e^x+y^2)\,dx+(2e^y+x^2)\,dy$；$C$ 爲在 $y=x$ 與 $y=x^2$ 之間所圍成區域的邊界.

解：$P(x,\ y)=e^x+y^2$, $Q(x,\ y)=2e^y+x^2$, 則 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x$.

$$\int_C (e^x+y^2)\,dx+(2e^y+x^2)\,dy=\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint_R (2x-2y)\,dA$$
$$=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x^2}^{y=x}(2x-2y)\,dy\,dx=\int_{x=0}^{x=1}(2xy-y^2)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x}dx$$
$$=\int_{x=0}^{x=1}(2x^2-x^2-2x^3+x^4)\,dx=\int_{x=0}^{x=1}(x^4-2x^3+x^2)\,dx$$
$$=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=1}$$
$$=\frac{1}{30}$$

8. 計算 $\oint_C y^2\,dx+3xy\,dy$；其中 C 爲上半平面介於兩圓 $x^2+y^2=1$ 與 $x^2+y^2=4$ 之間半區域 D 之邊界，如下圖所示.



解：雖然 D 並非單連通，但 y-軸將 D 分成兩個單連通區域 (見圖)．故利用極座標，我們可將 D 寫成

$$D=\{(r,\ \theta)|1\leqslant r\leqslant 2,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$$

所以，利用格林定理，$P(x,\ y)=y^2$，$Q(x,\ y)=3xy$，則

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=3y$$

$$\oint_C y^2\,dx+3xy\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

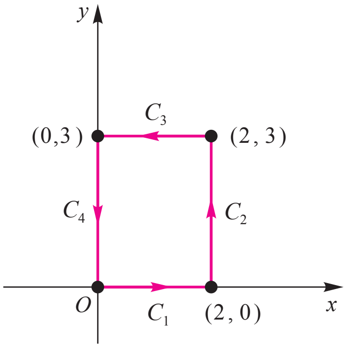
$$=\iint_D (3y-2y)\,dA=\iint_D y\,dA=\int_0^\pi\int_1^2 (r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\left(\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_1^2 r^2\,dr\right)=\left(-\cos\theta\Big|_0^\pi\right)\left(\frac{1}{3}r^3\Big|_1^2\right)$$

$$=\frac{14}{3}$$

9. 試利用兩個不同的方法，(1) 直接的方法，(2) 引用格林定理，計算下列之線積分．

(1) $\oint_C xy^2\,dx+x^3\,dy$，C 爲具有頂點 (0，0)、(2，0)、(2，3) 與 (0，3) 之矩形．



C_1：$x=t \Rightarrow dx=dt$，$y=0 \Rightarrow dy=0\ dt$，$0\leqslant t\leqslant 2$

C_2：$x=2 \Rightarrow dx=0\ dt$，$y=t \Rightarrow dy=dt$，$0\leqslant t\leqslant 3$

C_3：$x=2-t \Rightarrow dx=-dt$，$y=3 \Rightarrow dy=0\ dt$，$0\leqslant t\leqslant 2$

C_4：$x=0 \Rightarrow dx=0\ dt$，$y=3-t \Rightarrow dy=-dt$，$0\leqslant t\leqslant 3$

於是，

$$\oint_C xy^2\,dx+x^3\,dy=\underset{C_1+C_2+C_3+C_4}{\oint_C} xy^2\,dx+x^3\,dy$$

$$=\int_0^2 0\,dt+\int_0^3 8\,dt+\int_0^2 -9(2-t)\,dt+\int_0^3 0\,dt$$

$$=0+24-18+0=6$$

方法 2

$$\oint_C xy^2\,dx+x^3\,dy=\iint_D (3x^2-2xy)\,dA=\int_0^2\int_0^3 (3x^2-2xy)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^2 (9x^2-9x)\,dx=24-18=6$$

(2) $\oint_C y\,dx-x\,dy$，C 爲一圓，圓心在原點，半徑爲 1

解：方法 1

令 $x=\cos t$，$y=\sin t$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，則

$$\oint_C y\,dx-x\,dy=\int_0^{2\pi}[\sin t(-\sin t)-\cos t(\cos t)]\,dt$$

$$=-\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt$$

$$=-\int_0^{2\pi}dt=-2\pi$$

方法 2

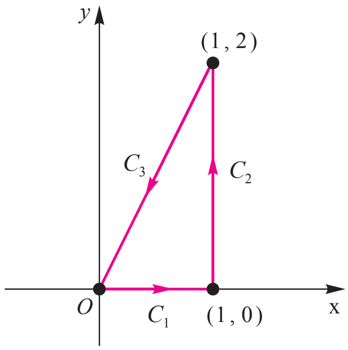
$P(x,y)=y$，$Q(x,y)=-x$，則 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1$.

$$\oint_C y\,dx-x\,dy=\iint_D(-1-1)\,dA=-2\iint_D dA=-2A(D)$$

$$=-2\pi(1)^2=-2\pi$$

(3) $\oint_C xy\,dx+x^2y^3\,dy$，$C$ 為具有頂點 $(0,0)$、$(1,0)$ 與 $(1,2)$ 之三角形.

解：方法 1



C_1：$x=t \Rightarrow dx=dt$，$y=0 \Rightarrow dy=0\ dt$，$0\leqslant t\leqslant 1$
C_2：$x=1 \Rightarrow dx=0\ dt$，$y=t \Rightarrow dy=dt$，$0\leqslant t\leqslant 2$
C_3：$x=1-t \Rightarrow dx=-dt$，$y=2-2t \Rightarrow dy=-2dt$，$0\leqslant t\leqslant 1$

於是，

$$\oint_C xy\ dx+x^2y^3\ dy=\underset{C_1+C_2+C_3}{\oint_C} xy\ dx+x^2y^3\ dy$$

$$=\int_0^1 0\ dt+\int_0^2 t^3\ dt+\int_0^1 [-(1-t)(2-2t)-2(1-t)^2(2-2t)^3]\ dt$$

$$=0+\frac{1}{4}\ t^4\Big|_0^2+\left[\frac{2}{3}\ (1-t)^3+\frac{8}{3}\ (1-t)^6\right]\Big|_0^1$$

$$=4-\frac{10}{3}=\frac{2}{3}$$

方法 2

$P(x，y)=xy$，$Q(x，y)=x^2y^3$，則 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=x$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2xy^3$.

$$\oint_C xy\ dx+x^2y^3\ dy=\iint_D (2xy^3-x)\ dA=\int_0^1\int_0^{2x} (2xy^3-x)\ dy\ dx$$

$$=\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\ xy^4-xy\right)\Big|_{y=0}^{y=2x} dx=\int_0^1 (8x^5-2x^2)\ dx$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

10. (1) 若一力 $\mathbf{F}=(y^2\cos x+z^3)\mathbf{i}+(2y\sin x-4)\mathbf{j}+(3xz^2+2)\mathbf{k}$，試證 $\mathbf{F}$ 為一保守力場.

(2) 求一純量函數 ϕ，使 $\mathbf{F}=\nabla\phi$.

(3) 此力移動一物體自點 $(0，1，-1)$ 至點 $(\pi/2，-1，2)$ 所作的功多少？

解：(1)

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2\cos x+z^3 & 2y\sin x-4 & 3xz^2+2\end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

故 $\mathbf{F}$ 爲一保守力場.

(2) 由 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i}+\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}+\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}=(y^2\cos x+z^3)\mathbf{i}+(2y\sin x-4)\mathbf{j}+(3xz^2+2)\mathbf{k}$

可知

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=y^2\cos x+z^3\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=2y\sin x-4\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=3xz^2+2\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

個別對 ①、② 及 ③ 作偏積分，可得

$$\phi(x,\ y,\ z)=y^2\sin x+xz^3+f(y,\ z)$$
$$\phi(x,\ y,\ z)=y^2\sin x-4y+g(x,\ z)$$
$$\phi(x,\ y,\ z)=xz^3+2z+h(x,\ y)$$

若取 $f(y,\ z)=-4y+2z$，$g(x,\ z)=xz^3+2z$，$h(x,\ y)=y^2\sin x-4y$，則上面三式一致，故

$$\phi(x,\ y,\ z)=y^2\sin x+xz^3-4y+2z+c$$

(3) 功$=\phi(\pi/2,\ -1,\ 2)-\phi(0,\ 1,\ -1)=(1+4\pi+4+4)-(-4-2)=4\pi+15$

習題 5-9

2. 設 $\mathbf{F}=z\mathbf{i}+x\mathbf{j}-3y^2z\mathbf{k}$，$S$ 爲圓柱面 $x^2+y^2=16$ 在第一卦限而介於平面 $z=0$ 及 $z=5$ 之間的部分，求 $\displaystyle\iint_D\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$.

解：單位法向量 $\mathbf{N}=\dfrac{\nabla(x^2+y^2-16)}{\|\nabla(x^2+y^2-16)\|}=\dfrac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}}{\sqrt{4x^2+4y^2}}=\dfrac{1}{4}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}=(z\mathbf{i}+x\mathbf{j}-3y^2z\mathbf{k})\cdot\frac{1}{4}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})=\frac{1}{4}(xz+xy)$$

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{j}=\frac{1}{4}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})\cdot\mathbf{j}=\frac{y}{4}$$

故 $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dA=\iint_R \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\frac{dx\,dz}{\|\mathbf{N}\cdot\mathbf{j}\|}=\iint_R \frac{xz+xy}{y}\,dx\,dz$

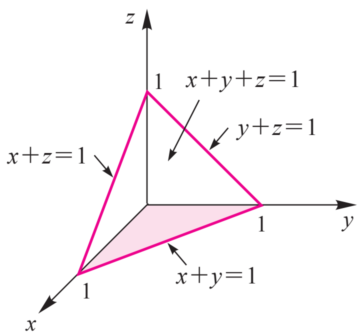
$$=\int_0^5\int_0^4\left(\frac{xz}{\sqrt{16-x^2}}+x\right)dx\,dz=\int_0^5(4z+8)\,dz$$

$$=90$$

習題 5-10

1. 若 $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，且 S 為曲面 $x+y+z=1$、$x=0$、$y=0$、$z=0$ 所圍成四面體的表面，求 $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$.

解：S 的圖形如下圖所示.



S 所圍成的立體區域為

$$\mathbf{F}=\{(x,\ y,\ z)|0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x,\ 0\leqslant z\leqslant 1-x-y\}$$

利用散度定理，

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iiint_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,d\mathbf{V}$$

$$=\iiint_T\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\,d\mathbf{V}$$

$$=\iiint_T 3\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}3\,dz\,dy\,dx$$

$$=3\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy\,dx=3\int_0^1\left(y-xy-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{1-x}\,dx$$

$$=3\int_0^1\left[1-x-x(1-x)-\frac{1}{2}(1-x)^2\right]dx$$

$$=3\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x+\frac{x^2}{2}\right)dx=3\int_0^1\frac{1}{2}(1-x)^2\,dx$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^1(1-x)^2\,dx=\frac{3}{2}\left(-\frac{(1-x)^3}{3}\Big|_0^1\right)$$

$$=\frac{1}{2}$$

3. 若 S 爲一閉曲面，且 $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，求 $\iint_S \mathbf{R}\cdot d\mathbf{S}$.

解：$\iint_S \mathbf{R}\cdot d\mathbf{S}=\iiint_T \nabla\cdot\mathbf{R}\,d\mathbf{V}=\iiint_T 3\,d\mathbf{V}=3V$